Segunda Etapa

SEGUNDO DIA – 2ª ETAPA

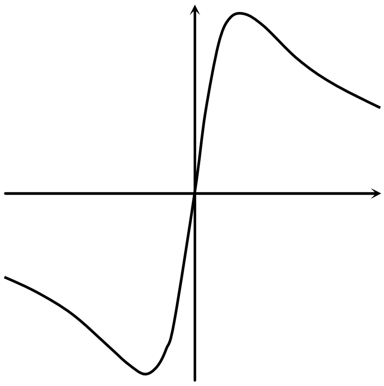
MATEMÁTICA

COMISSÃO DE PROCESSOS
SELETIVOS E TREINAMENTOS

Matemática

01. Analise as afirmações a seguir, considerando a função f, tendo como domínio e contradomínio o conjunto dos números reais, dada por $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$.

Parte do gráfico de f está esboçada a seguir.



0-0) f é uma função par.
1-1) A única raiz de f(x) = 0 é x = 0.
2-2) $|f(x)| \leq 1$, para todo x real.
3-3) Dado um real y, com |y| < 1 e y ≠ 0, existem dois valores reais x tais que f(x) = y.
4-4) f é uma função sobrejetiva.

Resposta: FVVVF

Justificativa:

$f(-x) = -2x/(x^2 + 1) = -f(x)$ e f é uma função ímpar. Temos que f(x) = 0 equivale a $2x/(x^2 + 1) = 0$ ou a x = 0. Temos $|2x/(x^2 + 1)| \leq 1$ se e somente se $x^2 - 2|x| + 1 \geq 0$; daí $(x \pm 1)^2 \geq 0$, com sinal positivo para x < 0 e negativo para x > 0, que é verdadeira para todo x real. Se $2x/(x^2 + 1) = y$ temos $yx^2 - 2x + y = 0$ que tem raízes reais distintas $x = (2 \pm \sqrt{4-4y^2})/(2y) = (1 \pm \sqrt{1-y^2})/y$.

02. Das companhias que publicam anúncios nos jornais **C**, **D** ou **F**, sabemos que:

- 30 publicam no **C**,
- 25 publicam no **D**,
- 30 publicam no **F**,
- 10 publicam em **C** e **D**,
- 9 publicam em **F** e **D**,
- 11 publicam em **C** e **F**, e
- 6 publicam em **C**, **D** e **F**.

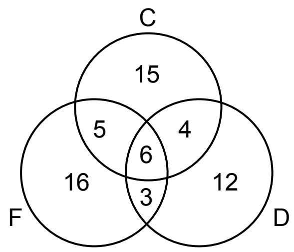
Considerando estas informações, analise as sentenças a seguir.

0-0) Onze companhias publicam anúncios em exatamente dois dos jornais.
1-1) Dezoito companhias publicam anúncios em pelo menos dois dos jornais.
2-2) Quarenta e três companhias publicam anúncios em um único jornal.
3-3) Sessenta e uma companhias publicam anúncios em pelo menos um dos três jornais.
4-4) Treze companhias publicam anúncios apenas no jornal **D**.

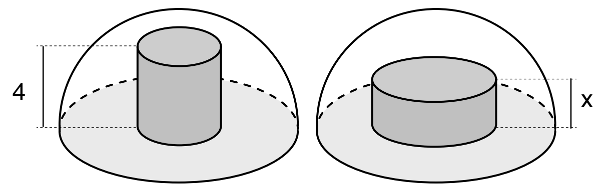
Resposta: FVVVF

Justificativa:

O gráfico abaixo inclui o número de companhias que publicam anúncios em três jornais, em dois jornais e em um jornal. Segue do gráfico que: 4 + 5 + 3 = 12 companhias publicam em exatamente dois dos jornais; 12 + 6 = 18 companhias publicam em pelo menos dois dos jornais; 12 + 15 + 16 = 43 companhias publicam em um único jornal; 43 + 12 + 6 = 61 companhias anunciam em pelo menos um jornal; 12 companhias publicam anúncios apenas no jornal **D**.



03. Um cilindro C_1, reto e de altura 4, está inscrito em uma semi-esfera de raio $\sqrt{21}$ (ou seja, uma base do cilindro repousa na base da semi-esfera e a circunferência da outra base está contida na semi-esfera), como ilustrado abaixo na figura à esquerda. Seja x a altura de outro cilindro, C_2, inscrito na mesma semi-esfera, e de mesmo volume que C_1.



Admitindo estes dados, analise as informações a seguir.

0-0) O raio da base de C_2 é $\sqrt{21-x^2}$.
1-1) O volume de C_2 é 18π.
2-2) A altura x de C_2 é raiz da equação $x^3 - 21x + 20 = 0$.
3-3) A altura x de C_2 é raiz da equação $x^2 - 4x - 7 = 0$.
4-4) A área lateral de C_2 é $2\pi\sqrt{5}$.

Resposta: VFVFF

Justificativa:

O volume do cilindro C_1 é $\pi(21 - 4^2)4 = 20\pi$. Procuramos um cilindro de altura x, inscrito na semi-esfera e de volume 20π, portanto, x satisfaz $\pi(21 - x^2)x = 20\pi$, e daí x é raiz da equação $x^3 - 21x + 20 = 0$, que também tem a raiz x = 4. Temos $x^3 - 21x + 20 = (x - 4)(x^2 + 4x - 5)$ e $x = (-4 \pm \sqrt{36})/2 = 1$. A área lateral de C_2 é $2\pi.\sqrt{20}.1 = 4\pi\sqrt{5}$.

04. Em uma escala de um vôo, as seguintes tarefas precisam ser executadas, nos intervalos de tempo mencionados. Quando alguma tarefa precisa ser executada depois de outra(s), tal fato é observado; quando não há nenhuma observação, as tarefas podem ser executadas simultaneamente.

1) Desembarque dos passageiros (15min)
2) Desembarque das bagagens (15min)
3) Embarque das bagagens dos novos passageiros (20min)(depois de 2)
4) Higienização da aeronave (15min)(depois de 1)
5) Abastecimento de combustível (20min) (depois de 1)
6) Checagem mecânica (20min)
7) Embarque das refeições (10min)(depois de 4)
8) Embarque dos novos passageiros (20min)(depois de 4 e 5).

Quantos minutos são necessários para executar todas as tarefas acima?

Resposta: 55

Justificativa:

As tarefas de números 1, 4 e 8 precisam de 50 minutos para serem executadas. Já as de números 1, 5 e 8 precisam de 55 minutos. Simultaneamente pode ser executada a tarefa 2, e depois a tarefa 3, que requerem um total de 35 minutos. As tarefas 5 e 6 podem ser executadas nos primeiros 20 minutos. A tarefa 7 pode ser executada depois de 30 minutos do início dos trabalhos.

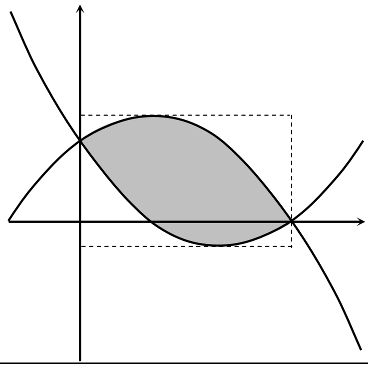
05. Admita que, quando a luz incide em um painel de vidro, sua intensidade diminui em 10%. Qual o número mínimo de painéis necessários para que a intensidade da luz, depois de atravessar os painéis, se reduza a 1/3 de sua intensidade? Dado: use a aproximação para o logaritmo decimal $\log 3 \approx 0{,}48$.

Resposta: 12

Justificativa:

Se n é o número de painéis, temos que $0{,}9^n = 1/3$ e, tomando logaritmos, $n(2\log 3 - 1) = -\log 3$; daí, $n = 0{,}48/(1- 2.0{,}48) = 12$.

06. As parábolas com equações $y = -x^2 + 2x + 3$ e $y = x^2 - 4x + 3$ estão esboçadas a seguir. Qual a área do menor retângulo, com lados paralelos aos eixos, que contém a área colorida, limitada pelos gráficos das parábolas?



Resposta: 15

Justificativa:

A parábola com equação $y = -x^2 + 2x + 3$ tem vértice no ponto (1, 4) e $y = x^2 - 4x + 3$ tem vértice no ponto (2, -1). Os pontos de interseção das parábolas têm abscissas soluções de $-x^2 + 2x + 3 = x^2 - 4x + 3$, que equivale a $x^2 - 3x = 0$ que tem raízes x = 0 e x = 3. Os pontos de interseção são (0, 3) e (3 , 0). O retângulo contendo a região limitada compreendida entre as duas parábolas tem medidas 3 e 5 e sua área é 15.

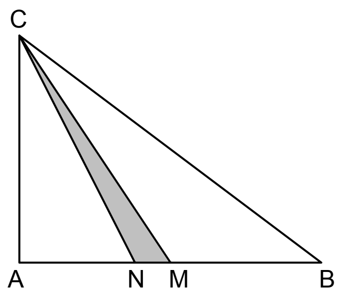
07. Júnior se exercita correndo 5km, 7km ou 9km por dia. Em certo período de dias consecutivos, superior a 7 dias, ele percorreu um total de 51km, e, pelo menos uma vez, cada um dos percursos de 5km, 7km e 9km. Quantas vezes, neste período, Júnior percorreu a distância de 5km?

Resposta: 07

Justificativa:

Sejam x, y e z o número de dias que Júnior correu 5, 7 e 9 quilômetros, respectivamente. Temos $5x + 7y + 9z = 51$ e $x + y + z > 7$ com x , y e z positivos. Temos $5(x + y + z) + 2y + 4z = 51$ e, portanto, $2y + 4z < 51 - 40 = 11$ e $5(x + y +z) > 40$. Daí $2y + 4z = 6, 8, 10$. Se $2y + 4z = 8, 10$ então $5(x + y + z) = 43, 41$, o que não pode ser. Então $2y + 4z = 6$ e $y = z = 1$ e $x = 7$.

08. Na ilustração a seguir, ABC é um triângulo retângulo com os catetos AB e AC medindo, respectivamente, 40 e 30. Se M é o ponto médio de AB e N é a interseção da bissetriz do ângulo ACB com o lado AB, qual a área do triângulo CNM?



Resposta: 75

Justificativa:

Temos BC = $\sqrt{40^2+30^2}=50$ e o cosseno do ângulo ACB é 30/50 = 3/5. A tangente do ângulo ACN é $\sqrt{\frac{1-3/5}{1+3/5}}=1/2$, portanto, AN = 30.1/2 = 15. Segue que NM = 20 – 15 = 5 e a área de CNM é 5.30/2 = 75.

09. Ao efetuarmos o produto dos polinômios abaixo

$(1 + x + x^2 +...+ x^{100})(1 + x + x^2 + ... + x^{50})$
qual o coeficiente de x^{75}? (Observação: os polinômios têm graus 100 e 50 e todos os coeficientes iguais a 1.)

Resposta: 51

Justificativa:
O coeficiente de x^{75} é a soma dos coeficientes de $x^{25}.x^{50}$, $x^{26}.x^{49}$,..., x^{75}.1 e vale (1 + 1 +...+ 1), com 51 parcelas, logo é igual a 51.

10. Quatro amigos, A, B, C e D compraram um presente que custou R$ 360,00. Se:

- A pagou metade do que pagaram juntos B, C e D,
- B pagou um terço do que pagaram juntos A, C e D e
- C pagou um quarto do que pagaram juntos A, B e D,

quanto pagou D, em reais?

Resposta: 78

Justificativa:

Sejam a, b, c e d os valores respectivos pagos por A, B, C e D. Temos a + b + c + d = 360, a = (b + c + d)/2, b = (a + c + d)/3 e c = (a + b + d)/4. Segue que a = (360 – a)/2 e a = 360/3 = 120, b = (360 – b)/3 e b = 360/4 = 90, c = (360 – c)/4 e c = 360/5 = 72, e d = 360 – 120 – 90 – 72 = 78.

11. Em uma festa, cada um dos participantes cumprimenta cada um dos demais, uma vez. Se o número de cumprimentos entre dois homens foi 21, e entre duas mulheres foi 45, quantos foram os cumprimentos entre um homem e uma mulher?

Resposta: 70

Justificativa:

Sejam h e m os números respectivos de homens e mulheres na festa. Temos h(h – 1) = 2.21 = 42 e $h^2 - h - 42 = 0$; portanto, h = (1 ± $\sqrt{1+168}$)/2 = (1±13)/2 e a raiz admissível é h = 7. Analogamente, m(m – 1) = 2.45 = 90 e $m^2 - m - 90 = 0$. Daí, m = (1 ± $\sqrt{1+360}$)/2 = (1 ± 19)/2 e a raiz que interessa é m = 10. O número de cumprimentos entre um homem e uma mulher é 7.10 = 70.

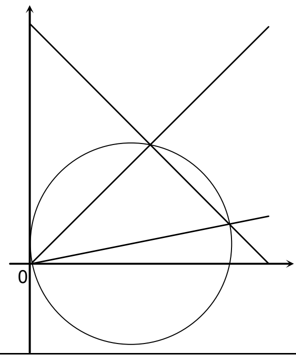
12. Uma gaveta contém 3 canetas pretas e 1 caneta vermelha. Uma segunda gaveta contém 7 canetas pretas e 3 azuis. Aleatoriamente, uma caneta é retirada da segunda gaveta e colocada na primeira e, em seguida, uma caneta é retirada da primeira gaveta e colocada na segunda. Qual a probabilidade percentual de o número de canetas de cada cor permanecer o mesmo nas duas gavetas?

Resposta: 62

Justificativa:

A probabilidade de a caneta retirada da segunda gaveta ser preta é de 7/10 = 0,7 e a probabilidade de a caneta retirada da primeira gaveta também ser preta é de 4/5 = 0,8, portanto, a probabilidade de os dois eventos ocorrerem é de 0,7.0,8 = 0,56. A probabilidade de a caneta retirada da segunda gaveta ser azul é de 3/10 = 0,3 e a probabilidade de a caneta retirada da primeira gaveta também ser azul é de 1/5 = 0,2, portanto, a probabilidade de os dois eventos ocorrerem é de 0,3.0,2 = 0,06. A probabilidade de o número de canetas permanecer o mesmo nas duas gavetas, depois da mudança das canetas, é de 0,56 + 0,06 = 0,62 = 62%

13. Em um sistema de coordenadas ortogonais xOy, um triângulo tem vértices nos pontos de interseção das retas com equações y = x, y = -x + 12 e y = x/5 (ilustradas a seguir). Se a equação da circunferência circunscrita ao triângulo é $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, indique o valor de $(a - b + c)^2$.

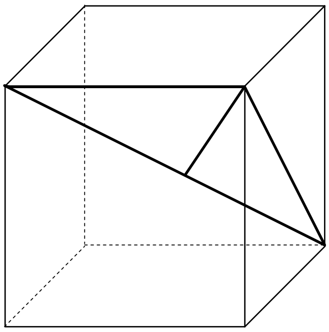


Resposta: 64

Justificativa:

As interseções das retas são os pontos A = (0,0) (interseção das retas y = x e y = x/5), B = (6,6) (interseção das retas y = x e y = -x + 12) e C = (10,2) (interseção das retas y = x/5 e y = -x + 12). O triângulo ABC é retângulo em B, portanto, a circunferência circunscrita a ABC tem vértice no ponto médio de AC, que tem coordenadas (5,1), e raio metade de AC, ou seja, $\sqrt{26}$. A equação da circunferência circunscrita a ABC é $(x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 26$ que se simplifica como $x^2 + y^2 - 10x - 2y = 0$. Segue que $(a - b + c)^2 = (-8)^2 = 64$.

14. Qual a distância entre um vértice de um cubo, com aresta medindo $20\sqrt{6}$, e uma das diagonais do cubo que não passam pelo vértice?

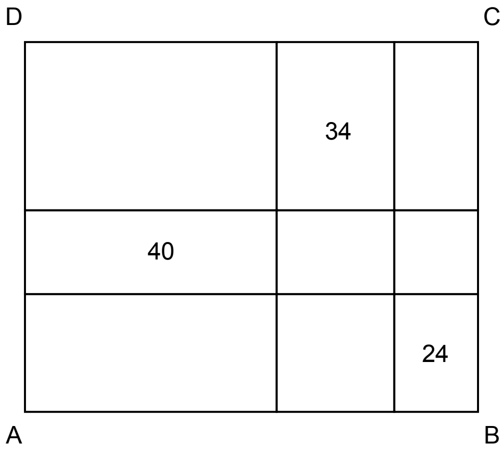


Resposta: 40

Justificativa:

O triângulo com lados uma diagonal do cubo, uma diagonal da face e uma aresta do cubo é retângulo. A distância entre o vértice e a diagonal da face é $(20\sqrt{6})^2\sqrt{2}/(20\sqrt{6}\ \sqrt{3}) = 40$.

15. Um retângulo ABCD é dividido em nove retângulos, e o perímetro de cada um de três destes retângulos, está indicado está indicado em seu interior, como ilustrado na figura abaixo.



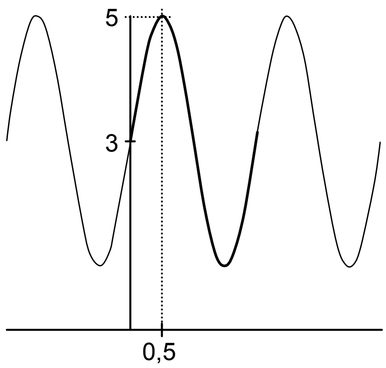
Qual o perímetro do retângulo ABCD?

Resposta: 98

Justificativa:

Se a base do retângulo ABCD foi dividida em pedaços de tamanhos b_1, b_2 e b_3 (ordenados da esquerda para a direita) e a altura em pedaços de tamanhos a_1, a_2 e a_3 (ordenados de baixo para cima), temos que $2b_1 + 2a_2 = 40$, $2b_2 + 2a_3 = 34$ e $2b_3 + 2a_1 = 24$. Adicionando estas desigualdades obtemos $2b_1 + 2a_2 + 2b_2 + 2a_3 + 2b_3 + 2a_1 = 98$, que é o perímetro do retângulo ABCD.

16. A ilustração a seguir é parte do gráfico da função $y = a.\text{sen}(b\pi x) + c$, com a, b e c sendo constantes reais. A função tem período 2 e passa pelos pontos com coordenadas (0,3) e (1/2,5).



Determine a, b e c e indique $(a + b + c)^2$.

Resposta: 36

Justificativa:

Como a função tem período 2 temos que $2\pi/(b\pi) = 2$ e b = 1. Uma vez que a função passa pelo ponto (0,3) temos 3 = a. sen 0 + c e c = 3. Assim, a função é do tipo $y = a.\text{sen}(\pi x) + 3$ e, como passa pelo ponto (1/2,5), temos a = 2. A função é $y = 2\text{sen}(\pi x) + 3$ e $(a + b + c)^2 = 36$.